

# Tentamen Algoritmen en Datastructuren

vrijdag 10 februari 2006, 14 - 17 uur

Het tentamencijfer  $T$  is  $(p/10) + 1$ , waarbij  $p$  het totaal aantal behaalde punten is. Het eindcijfer van het vak is  $(3T + P)/4$ , waarbij  $P$  het practicumresultaat is.

**NB. Beargumenteer je antwoorden.**

1. (30 punt) Het ADT Dictionary bevat items  $(k,e)$  die elk een element  $e$  en een key (sleutel)  $k$  bevatten. De fundamentele methoden zijn: `findElement(k)`, `insertItem(k,e)`, `removeElement(k)`.

Beschrijf hoe het ADT Dictionary efficiënt geïmplementeerd kan worden mbv. een hashtable met open addressing en linear probing. Behandel daarbij de begrippen bucket array, hash code, compression map en collision handling. Geef ook een efficiënt algoritme voor `removeElement`.

2. (30 punt) Het algoritme van Dijkstra vindt, in een gewogen ongerichte graaf  $G$  met daarin knoop  $u$ , voor elke knoop  $v$  in  $G$  de lengte van een kortste pad van  $u$  naar  $v$ . De gewichten zijn niet negatief. Neem aan dat  $G$  samenhangend en enkelvoudig is (geen self-loops, geen parallelle kanten), en verder dat  $G$   $n$  knopen en  $m$  kanten bevat.

Het globale idee van Dijkstra's algoritme is om het probleem stapsgewijs op te lossen, en daarbij in elke knoop bij te houden wat de lengte van het tot dan toe gevonden kortste pad is. Bij elke stap wordt de verzameling van 'goede' knopen uitgebreid met de knoop buiten de verzameling met de laagste padwaarde; vervolgens wordt de padwaarde van een aantal knopen aangepast (*edge relaxation*).

Beschrijf het algoritme van Dijkstra in pseudocode. Geef ook een toelichting, beargumenteer de correctheid en analyseer de tijdscomplexiteit.

3. (30 punt) NB. Maak deel (a) of deel (b).

- (a) Leg het principe van de discrete Fouriertransformatie uit en de toepassing ervan bij het vermenigvuldigen van polynomen. Denk daarbij aan de interpolatiestelling voor polynomen, primitieve  $n$ -de eenheidswortels  $\omega$ , de matrix  $F$  met  $F[i, j] = \omega^{ij}$  en zijn inverse  $F^{-1}$  met  $F^{-1}[i, j] = \omega^{-ij}/n$ , en de convolutiestelling.

- (b) Dit gedeelte gaat over complexiteitsklassen.

- i. Geef definities van de complexiteitsklassen P (polynomiaal) en NP (nondeterministisch polynomiaal).
- ii. Wanneer is een probleem NP-volledig (*NP-complete*)?
- iii. Formuleer een NP-volledig probleem en laat zien dat het in de klasse NP zit (je hoeft dus niet de NP-volledigheid te bewijzen).